

RSOTP 子空间学习方法

曾昭雄^{1),2)} 黄磊¹⁾ 刘昌平¹⁾

¹⁾(中国科学院自动化研究所,北京 100190) ²⁾(中国科学院研究生院,北京 100190)

摘要 为增强张量子空间学习的稳定性、可重现性,及其分类能力,提出了一种鲁棒的子空间学习方法——RSOTP。该方法以 MFA 为鉴别准则,采用稳定的初始化向量和交替形式的正交来去除了权重因子,从而使整个学习过程不仅具有鲁棒性、可重现性,而且具有较强的分类能力,该方法在大小型人脸数据库上进行的实验均取得了较高的识别率。

关键词 张量投影 子空间学习 人脸识别

中图法分类号: TP391.41 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2009)12-2539-06

A Reversible and Stable Orthogonal Tensor Projection Method in Subspace Learning

ZENG Zhao-xiong^{1),2)}, HUANG Lei¹⁾, LIU Chang-ping¹⁾

¹⁾(Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190)

²⁾(Graduate School of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190)

Abstract In this paper we proposed a MFA based RSOTP subspace learning method. By employing stable discriminant vector in initialization and using an alternative orthogonal selection and throwing off weight matrix, this approach enhances the robustness of the learning process and strengthens the classification ability, and achieves better recognition performance on both large and small face datasets than conventional techniques.

Keywords tensor projection, subspace learning, face recognition

1 引言

线性鉴别分析(LDA)、主成分分析(PCA)、保局投影算法(LPP)^[1-3]等方法都是基于矢量进行降维的子空间学习方法。由于PCA^[1]注重的是个体与个体之间的差异性,没有把类内的信息纳入到统计特征里,因此在样本较大时分类效果不够理想。LDA^[2]把类内信息与类间信息都利用起来了,其分类能力一般比PCA要高。但是这些传统的子空间学习算法的分类能力仍然有提升的空间。

最近几年兴起的张量子空间学习方法很大程度上提升了子空间的分类能力与学习能力。一个 $m \times n$ 大小的图像可被视为一个二阶张量,对于任意一

个子空间,由于PCA和LDA方法需要求解 $m \times n$ 个参数,而张量投影则只需要求解 $(m+n)$ 个参数,因而大大增强了其学习能力。为了增强张量子空间的分类能力,往往需要求解很多的子空间。如果这些子空间之间能保持正交,则会使分类能力更强。

张量子空间学习过程中必须先初始化子空间,目前初始化的方法主要有:随机向量法^[4]、单位阵法^[5]。文献[5]先采用一个单位阵初始化第1个子空间,然后利用已求解的子空间来求解当前子空间;而文献[4]则采用随机向量来初始化所有子空间,并利用已求解的子空间和当前子空间(随机初始化的)来迭代求解当前子空间,但这将使整个学习过程不可恢复,分类结果不稳定。然而,一个鲁棒性的算法需要在同样的输入情况下,具有稳定的输出,而

文献[4]提出的方法则不能实现这一点。尽管如此,由于其子空间数目多,且能保持正交,因此分类能力一般比文献[5]方法强。本文在文献[4]方法的基础上,通过稳定的子空间初始化和稳定的正交选择来使算法具有鲁棒性和可重现性。

本文提出了具有以下特色的 RSOTP (reversible and stable orthogonal tensor projection) 子空间学习方法:

(1) 以 MFA (marginal fisher analysis) 方法^[6]为鉴别准则,采用稳定的矢量来初始化张量子空间,以便使整个学习过程具有鲁棒性;

(2) 在一定范围内通过使子空间保持交替正交来取代随机正交,使学习过程稳定;

(3) 通过实验证明,在不降低识别率的前提下,由于该方法去除了一般子空间求解的权重因子(或者相似度矩阵),从而使计算更简便;

(4) 通过实验确定了较为精确的收敛范围和迭代步数。

2 相关数学原理

下面是张量子空间的一些基本概念:

定义 1 如果 \mathbf{A} 是一个 n 阶张量,则可以表示为 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m_1 \times m_2 \times \dots \times m_n}$, 其中, m_j 为第 j 维向量的长度。 \mathbf{A} 中的任意一个元素可以表示成为 $A_{i_1 i_2 \dots i_n}$, 这里 $i_j \in \{1, 2, \dots, m_j\}, j = 1, \dots, n$ ^[7]。

例如,一个 $m \times n$ 大小的图像 \mathbf{A} 可以看成为一个二阶张量,即 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 。其中, m 为图像的高度, n 为图像的宽度, $A_{i,j}$ 为其中的一个像素。

定义 2 设将一个张量 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m_1 \times m_2 \times \dots \times m_n}$ 映射到实数的张量为 $\mathbf{P} = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$, 其中, \mathbf{u}_i 是维数为 m_i 的列向量, 则有 $\mathbf{y} = \sum_{i_n} \dots \left(\sum_{i_1} A_{i_1, \dots, i_n} \times p_{1, i_1}, \dots \right) \times p_{n, i_n} \in \mathbf{R}$, 其可简化为

$$\mathbf{y} = \mathbf{P}^T \mathbf{A} \quad (1)$$

其中, T 表示转置。

定义 3 一个张量 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m_1 \times m_2 \times \dots \times m_n}$ 与矩阵 $\mathbf{P}^{m_k \times \tilde{m}_k}$ 的 k 模式积 $\mathbf{Y} = \mathbf{A} \times_k \mathbf{P}$ 为 $Y_{i_1, \dots, i_{k-1}, i_{k+1}, \dots, i_n} = \sum_{j=1}^{m_k} A_{i_1, \dots, i_{k-1}, j, i_{k+1}, \dots, i_n} \times P_{j, i}$ ($i = 1, \dots, \tilde{m}_k$)。

定义 4 两个子空间 \mathbf{U}, \mathbf{V} 正交的条件是: \mathbf{U}, \mathbf{V} 至少在某一个列向量上正交, 即 $\mathbf{u}_i \perp \mathbf{v}_i, i = 1, \dots, n$ 。

3 正交张量子空间学习

MFA 准则是采用不同类的边缘点的协方差来作为类间散布, 由于该准则能有效扩大类与类的边缘之间的距离, 因此对于大型样本库具有突出的鉴别矢量抽取能力。张量子空间学习就是利用 MFA 准则, 通过缩小类内距离和扩大类间边缘点对的距离来取得较高的判别分类效果^[4]。不同的是, 由于张量子空间包含多个列向量, 因此投影时, 需要对原始张量进行多次降维。

定义两个集合 \mathbf{B} 和 \mathbf{W} , 其中, \mathbf{B} 是属于不同类的 k 近邻集合(即边缘点对), \mathbf{W} 是属于同类的 k 近邻集合, 每个训练样本都有自身的同类与不同类的 k 近邻集合。

张量子空间学习的主要思想是: 在子空间投影后, 属于集合 \mathbf{B} 的投影之和应尽量大, 以扩大不同类的边缘点对之间的距离; 属于集合 \mathbf{W} 的投影之和应尽量小, 以缩小同类的边缘点对之间的距离。本文去除了很多学者^[4, 6-8]在优化过程中使用到的相似度矩阵或惩罚因子, 从而使表达式简单明了, 即

$$\max_{\mathbf{U}_k} \frac{\sum_{(i,j) \in \mathbf{B}} \|\mathbf{U}_k^T \mathbf{A}_i - \mathbf{U}_k^T \mathbf{A}_j\|^2}{\sum_{(i,j) \in \mathbf{W}} \|\mathbf{U}_k^T \mathbf{A}_i - \mathbf{U}_k^T \mathbf{A}_j\|^2} \quad (2)$$

s. t. $\mathbf{U}_k \perp \mathbf{U}_l \quad l = 1, \dots, k-1$

其中, \mathbf{U}_k 是第 k 个子空间, 它需要与前面 $(k-1)$ 个子空间保持正交, 以增强其分类能力。 $\|\cdot\|$ 是 Frobenius 范数。

式(2)仅能保证获得局部最优子空间, 为了获得全局最优子空间, 如同文献[4]所述, 可通过逐步迭代来求取一系列子空间, 并且设置一定的收敛规律^[9]。如果要求取第 k 个子空间 \mathbf{U}_k 中的第 i 个列向量 $\mathbf{u}_{k,i}$, 则可用除 $\mathbf{u}_{k,i}$ 以外的向量来对训练样本 \mathbf{A}_m 进行张量投影, 即可以获得一个维数为 m_i 的向量

$$(\mathbf{y}_m)_{k,i} = \mathbf{A}_m \times \mathbf{u}_{k,1} \times \dots \times \mathbf{u}_{k,i-1} \times \mathbf{u}_{k,i+1} \times \dots \times \mathbf{u}_{k,n} \quad (3)$$

其中, $\mathbf{u}_{k,i-1}$ 表示第 k 个子空间的第 $i-1$ 个列向量。若先将式(2)转化为如下形式^[4]:

$$\max_{\mathbf{u}_{k,i}} \frac{\mathbf{u}_{k,i}^T \mathbf{S}_b \mathbf{u}_{k,i}}{\mathbf{u}_{k,i}^T \mathbf{S}_w \mathbf{u}_{k,i}} \quad (4)$$

其中, 类间散布矩阵为

$$S_b = \sum_{(m,n) \in B} ((y_m)_{k,i} - (y_n)_{k,i})((y_m)_{k,i} - (y_n)_{k,i})^T \quad (5)$$

类内散布矩阵为

$$S_w = \sum_{(m,n) \in W} ((y_m)_{k,i} - (y_n)_{k,i})((y_m)_{k,i} - (y_n)_{k,i})^T \quad (6)$$

然后,解方程

$$S_b u_{k,i} = \lambda S_w u_{k,i} \quad (7)$$

则与最大特征值对应的特征向量即为 $u_{k,i}$ 。

对于子空间中的正交约束向量,假设子空间在第 i 个列向量上正交,则式(2)可以转化为^[4]

$$\begin{aligned} \max_{u_{k,i}} & u_{k,i}^T S_b u_{k,i} \\ \text{s. t.} & u_{k,i}^T S_w u_{k,i} = 1 \\ & u_{k,i}^T u_{l,i} = 0 \quad l = 1, \dots, k-1 \end{aligned} \quad (8)$$

经过推导,可得

$$(M(S_w)^{-1} S_b) u_{k,i} = \lambda u_{k,i} \quad (9)$$

其中,

$$M = I - (S_b)^{-1} A B A^T \quad (10)$$

$$A = [u_{1,i}, u_{2,i}, \dots, u_{k-1,i}] \quad (11)$$

$$B = A^T (S_w)^{-1} A \quad (12)$$

$u_{k,i}$ 即为与式(9)最大特征值对应的特征向量。这样式(4)和式(8)就能够保证获得一个局部最优解^[4]。

在运行算法之前,往往要先对图像进行一些块变换。这样不仅可以保存图像的局部结构信息,而且可以提升子空间的数目,以便增强系统的分类能力。常用的块变换有 $4 \times 4, 4 \times 2, 8 \times 1$, 其中 4×2 变换如图 1 所示。

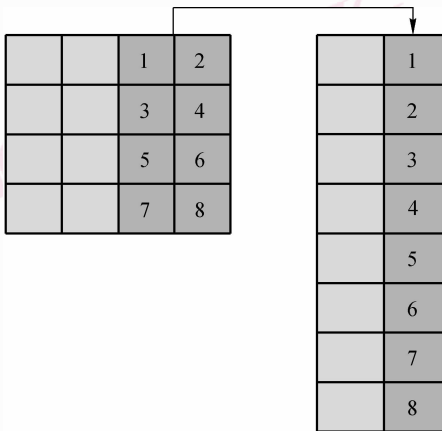


图 1 图像的 4×2 块变换
Fig. 1 4×2 block transformation

4 RSOTP 子空间学习方法

RSOTP 方法采用了固定的初始化向量来使学习过程稳定、可重现。但在求解子空间的过程中常常面临“先有鸡还是先有蛋”的问题,即求解的子空间在刚开始的时候是空的,而逐一求解其列向量时,由于必须做一个除该向量以外的张量投影,因此必须将所有子空间初始化。文献[4]采用随机初始化的方式,取得了很高的识别率。但是,由于这种随机初始化方式,导致这个学习过程不可重现,因此算法不具有鲁棒性。为使算法具有鲁棒性,本文提出了一种基于 LDA/PCA 向量的初始化方式,因为 LDA/PCA 向量具有很好的分类能力。为了提升识别率,本文采用 LDA 向量来初始化子空间。实验证明,用 LDA 向量初始化的子空间在学习过程中可以很快收敛,而且在不同的数据库上可以取得很高的识别率。如图 2 所示,以 RSOTP_{4×2} 方法为例,对大小为 32×32 的图像先做一个 4×2 的块变换,图像大小就转换成为 8×128 大小,相应两个列向量长度分别为 8 和 128。其中, V 为 LDA/PCA 向量,每一列的长度为 1 024。初始化时,先用 V 的第 1 列的前 8 个值来初始化第 1 个子空间的长度为 8 的列向量;然后用 V 的第 2 列的前 128 个值来初始化第 2 个子空间的长度为 128 的列向量,依此类推。

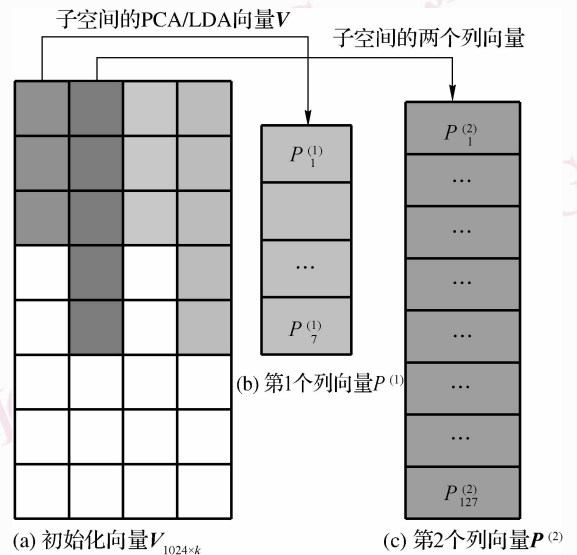


图 2 用 PCA/LDA 向量初始化子空间
Fig. 2 Using PCA/LDA vector to initialize subspace

在求解正交子空间(其序号较小时)时,RSOTP 方法采用固定的子空间交替正交取代了随机形式的

子空间正交。每个子空间由多个列向量组成,而选择在哪个向量上进行子空间正交也无一定准则。在所求子空间的次序 $k \leq \min\{m_i\}, i = 1, \dots, n$ 时,可以在子空间的任一向量上保持子空间正交。当 $k > m_i$ 时,在小于长度 m_i 的向量上不能保持子空间正交。在一般的图像(二阶张量)中,子空间有两个列向量,通常在 $k \leq \min\{m_1, m_2\}$ 时,可以在任一向量上使子空间正交,当 $\min\{m_1, m_2\} < k \leq \max\{m_1, m_2\}$ 时,在较长的那个向量上使子空间保持正交。当 $k > \max\{m_1, m_2\}$ 时,则不能继续求解子空间,因为此时不能保证子空间的正交性。当 $k \leq \min\{m_1, m_2\}$ 时,通常的做法是随机选择正交的向量。但是,这样也会使得整个学习过程不稳定,不可恢复。因此本文提出了在两个向量上用交替正交来取代随机正交的方法。例如,假设 $m_1 < m_2, k$ 为奇数时,则可以在第 1 个向量上使子空间保持正交; k 为偶数时,在第 2 个向量上使子空间保持正交; $\min\{m_1, m_2\} < k \leq \max\{m_1, m_2\}$ 时,在第 2 个向量上,使子空间保持正交。

由于 RSOTP 方法去除了一般最优化过程中的权重因子^[4-5, 8],因此不仅可以使表达式更为清晰明了,而且不会使性能下降。很多经典方法就是在式(2)上乘上权重因子(相似度矩阵),以获得更好的分类效果。本文去除了权重因子的实验数据表明,这不仅对识别结果几乎没有影响(参考后面的实验结果),还使这个优化过程简单明了。

如文献[9]所述,本文通过设置严格的收敛误差(10^{-3})和迭代步数(20),从而使算法能很快地收敛,并且具有较强的分类能力。

RSOTP 算法流程如下:

输入: $\{X_i\}_{i=1}^N, \mathbf{B}, \mathbf{W}$ 输出: $\{U_i\}_{i=1}^K$

(1)对图像进行 LDA/PCA 降维,并用所得到的 LDA/PCA 向量按图 1 的方法初始化 K 个子空间。

(2) $k = 1$, 用式(7)迭代求解第 1 个子空间。

(3) $1 < k \leq \min\{m_1, m_2\}$, 如果 k 为奇数,则按式(7)迭代求解子空间的较短的向量,并按式(9)迭代求解子空间的较长的向量;如果 k 为偶数,则相反。

(4) $\min\{m_1, m_2\} < k \leq \max\{m_1, m_2\}$, 则按式(7)迭代求解子空间的较短的向量,并按式(9)迭代求解子空间的较长的向量。

5 实验结果与分析

本文主要在两个人脸数据库上进行测试,即 ORL^[10] 和 CMU-PIE^[11] 数据库。实验时,先将库中所有图片均归一化到 32×32 大小,再对这两个数据

库做 $4 \times 4, 4 \times 2, 8 \times 1$ 的块变换,然后进行 LDA, PCA, RSOTP, RSOTP $_{4 \times 4}$, RSOTP $_{4 \times 2}$, RSOTP $_{8 \times 1}$ 等算法测试,由于固定的初始化向量和正交选择,只需要做一次测试而不需要做多次实验来取均值,因此两个库上的所有图片最终均被处理成为 32×32 大小。由于 ORL 数据库主要集中在人脸部分,因此在这里不做裁剪,而 CMU-PIE 数据库则包含了复杂的背景,本文先通过调用一个人脸定位核心程序来对它们进行裁剪,然后将其归一化到 32×32 大小。

(1) ORL 人脸库

ORL 人脸库一共包含 40 人,每人 10 张照片,包括表情变化、微小姿态变化、20% 以内的尺度变化。其大小为 112×92 ,识别时,首先将其线性变换为 64×64 大小,再进行 4×4 的下采样,最后将其转换为 32×32 大小的样本。本文随机地选择 5 张照片作为训练样本,另外的 5 张作为测试样本。这样,一共有 200 幅训练样本图像,200 幅测试样本图像。

(2) CMU-PIE 人脸库

PIE 人脸库由 68 个人组成,每个人 13 种姿态,43 种光照条件,4 种表情,共 41368 张图片。本文选择在所有光照条件和表情条件下的 5 个近似正向的姿态(C05, C07, C09, C27, C29),每个人 170 张,总共 11560 张图片。同样地,本文从每个人的 170 张图片中随机选择 30 张图片作为训练样本,剩下的 140 张图片作为测试样本。这样,整个训练样本数目为 2040,测试样本数目为 9520。

5.1 识别率分析

从 ORL 数据库的识别实验结果(表 1)可见,RSOTP $_{4 \times 2}$ 算法在 98 个子空间时识别率达到了 97.00%,超过了 LDA 算法的 96.50% 和 PCA 的算法 95.00% 的识别率。RSOTP $_{4 \times 4}$ 算法在 43 个子空间时识别率达到 96.00%,RSOTP $_{8 \times 1}$ 算法在 73 个子空间时的识别率达到 96.50%,均远远超过了 PCA 算法的识别水平。

表 1 在 ORL 和 PIE 数据库上的实验结果

Tab. 1 Recognition rate on ORL and PIE

方法	识别率(%) _{维数}	
	ORL	PIE
PCA	95.00 ₁₃₆	63.49 ₈₄₇
LDA	96.50 ₃₆	88.58 ₆₇
RSOTP	91.00 ₃₂	88.48 ₃₂
RSOTP $_{4 \times 4}$	96.00 ₄₃	91.58 ₅₃
RSOTP $_{4 \times 2}$	97.00 ₉₈	93.68 ₇₆
RSOTP $_{8 \times 1}$	96.50 ₇₃	93.45 ₇₉

在 PIE 这样一个大型人脸数据库上, $RSOTP_{4 \times 4}$, $RSOTP_{4 \times 2}$, $RSOTP_{8 \times 1}$ 方法的识别性能都要远远超过 LDA 和 PCA 算法。 $RSOTP_{4 \times 4}$ 方法在 53 个子空间时的识别率可以达到 91.58%, $RSOTP_{4 \times 2}$ 方法在 76 个子空间时的识别率可以达到 93.68%, 而 $RSOTP_{8 \times 1}$ 方法在 79 个子空间时的识别率可以达到 93.45%, 都远远高于 LDA 算法的 88.58% 和 PCA 算法的 63.49% 的识别率。

综上所述, 本文提出的 RSOTP 算法采用了 MFA 准则、稳定的初始化、交替正交、去除权重矩阵等措施, 比传统的 PCA, LDA 算法有更强的分类能力, 并能使整体学习过程更加稳定、可重现, 因而具有很好的鲁棒性和分类能力, 识别率超越了文献[4]算法。

其中, $RSOTP_{4 \times 2}$ 方法对于两个数据库的测试结果都是最优的。

图 3 显示了 ORL 人脸库上的 $RSOTP_{4 \times 2}$ 方法的识别率从 30 个子空间一直增加到 128 个子空间的曲线图。由图 3 可以看出, 识别率随着子空间个数的增加而升高, 但不是线性的, 而是呈跳跃性的变化。RSOTP 算法是在原图上直接做正交子空间的张量投影, 由于其子空间数目少(最多只有 32 个), 因此大大削弱了其分类能力。而通过做块变换的 $RSOTP_{4 \times 4}$, $RSOTP_{4 \times 2}$, $RSOTP_{8 \times 1}$ 等算法则可以将子空间的数目分别提升到 64, 128, 128 个, 因此分类能力显著增强。

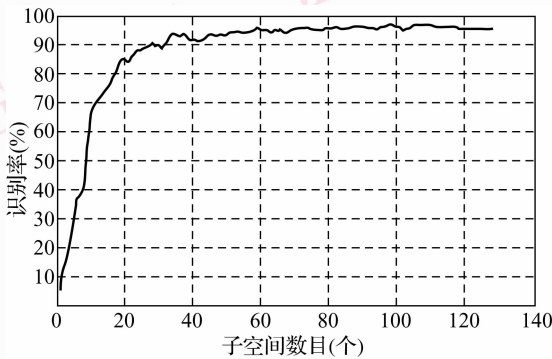


图 3 $RSOTP_{4 \times 2}$ 算法对 ORL 人脸库的识别率随子空间数目的变化曲线

Fig. 3 Recognition rate of $RSOTP_{4 \times 2}$ on ORL changes with the number of subspaces

5.2 有无权重因子的识别效果比较

下面是在 ORL 人脸库上做的测试, 并对有无权重因子的识别效果进行了比较。以带权重的 $RSOTP_{4 \times 4}$ 算法和不带权重的 RSOTP 算法为例, 其识

别率如图 4 所示。

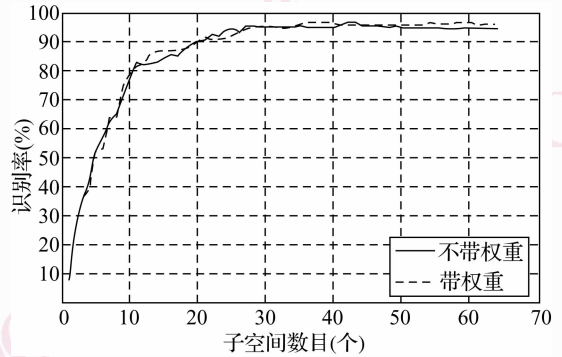


图 4 带权重因子与不带权重因子算法的识别率对比
Fig. 4 Comparison between with and without weight matrix

从图 4 可以看出, 带权重因子的张量分析方法和不带权重的 $RSOTP_{4 \times 4}$ 方法识别率并无太大差别, 并且最高识别率相同(96.00%), 因此可以去除权重, 以减少计算。

5.3 交替正交子空间投影与随机正交子空间投影的识别效果对比

图 5 显示了 ORL 人脸库上的交替正交与随机正交的识别效果对比。进行对比时, 首先做 4×4 的块变换, 再用 LDA 算法求解得到的向量初始化子空间。实线表示交替正交得到的识别率, 虚线表示随机正交的识别率。由图 5 可以看出, 交替正交比随机正交的识别效果要好。交替正交的最高识别率为 96.00% (43 维), 而随机正交的识别率只有 94.50% (36 维)。由此可见, 交替正交比随机正交更为优越。

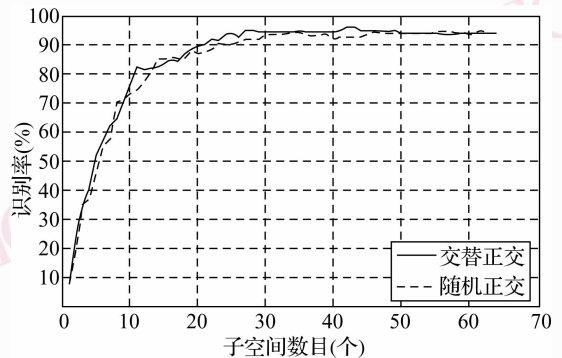


图 5 交替正交与随机正交对比

Fig. 5 Comparison between alternate orthogonalization and random orthogonalization

5.4 计算分析

用 RSOTP 方法学习得到的用于降维的参数个

数为 $O(m+n)$, 其中 m, n 分别为图像的高、宽, 而降维到 k 个子空间需要的参数个数为 $O(k(m+n))$, 而基于矢量的方法, 如 LDA, PCA 算法则需要 $O(kmn)$ 个参数。虽然 RSOTP 与 LDA/PCA 等方法的子空间个数 k 有一定的差别, 但由于 k 不是其中的主导因子, 因而总的参数个数大大下降, 这有利于节省识别系统的存储空间, 其在嵌入式系统上用于人脸识别将大有可为, 具有很高的应用价值。

6 结 论

由于 RSOTP 方法采用了基于 LDA 向量的初始化、交替正交、去除权重因子, 使张量学习过程稳定、可重现, 因而具有很好的鲁棒性和较强的分类能力。实验证明, RSOTP_{4×2} 方法的分类能力最强, 因此可以将它作为最优分类器用。

本文的下一步工作是通过建立一些约束来减少降维后新产生的边缘点对的数目, 因为这些不同类的边缘点对严重影响了分类效果。

参考文献 (References)

- 1 Turk M, Pentland A. Eigenfaces for recognition [J]. Journal of Cognitive Neuroscience, 1991, 3(1):71-86.
- 2 Belhumeur P N, Hespanha J P, Kriegman D J. Eigenfaces vs. Fisherfaces: Recognition using class specific linear projection [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1997, 19(7):711-720.
- 3 He X F, Yan S C, Hu Y, et al. Face recognition using Laplacianfaces [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2005, 27(3):328-340.
- 4 Hua G, Viola P A, Drucker S M. Face recognition using discriminatively trained orthogonal rank one tensor projections [A]. In: Proceedings of IEEE International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition [C], Minneapolis, Minnesota, USA, 2007: 1-8.
- 5 Xu D, Lin S, Yan S C, et al. Rank-one projections with adaptive margins for face recognition [A]. In: Proceedings of IEEE International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition [C], New York, USA, 2006, 1:175-181.
- 6 Yan S C, Xu D, Zhang B Y, et al. Graph embedding and extensions: A general framework for dimensionality reduction [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2007, 29(1):40-51.
- 7 Kolda T G. Orthogonal tensor decompositions [J]. Society for Industrial and Applied Mathematics. Journal on Matrix Analysis and Applications, 2001, 23(1):243-255.
- 8 He X F, Cai D, Niyogi P. Tensor subspace analysis [A]. In: Proceedings of Advances in Neural Information Processing Systems [C], Cambridge, MA, USA: MIT Press, 2005:499-506.
- 9 Wang H, Yan S C, Tang X O, et al. A convergent solution to tensor based learning [A]. In: Proceedings of International Joint Conferences on Artificial Intelligence (IJCAI07 Oral) [C], Regency, Vancouver, B. C., Canada, 2007:629-634.
- 10 Samaria F, Harter A. Parameterization of a stochastic model for human face identification [A]. In: Proceedings of IEEE Workshop on Applications of Computer Vision [C], Sarasota, FL, USA, 1994: 138-142.
- 11 Sim T, Baker S, Bsat M. The cmu pose, illumination, and expression database [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2003, 25(12):1615-1618.